2. *Попов Ю. И.* Общая теория регулярных гиперполос. Калининград, 1983.

3. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Ч. 1. Калининград, 1980.

4. *Норден А. П., Тимофеев Г. Н.* Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. вузов. Математика. 1972. №8. С. 81—89.

5. *Столяров А. В.* Условие квадратичности регулярной гиперполосы // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 9. Калининград, 1978. С. 93—101.

6. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.

S. Volkova, Yu. Popov

FIELDS OF FUNDAMENTAL AND EQUIPPED OBJECTS
OF COEQUIPPED HYPERSTRIP OF PROJECTIVE SPACE

The giving normally s-coequipped hyperstrip ${}^sH_m$ in a frame of 1st order R_1 is given and the existence theorem of hyperstrip ${}^sH_m$ is proved. The fields of Norden — Timofeev's planes [4] and fields of geometrical objects in differential neighborhoods of 2nd and 3rd order of hyperstrip ${}^sH_m$ are constructed.

УДК 514.75

Н. В. Виноградова, М. В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) эллиптических параболоидов. Показано, что такие комплексы существуют. Найдены геометрические свойства исследуемых многообразий.

Ключевые слова: эллиптический параболоид, аффинное пространство, комплекс, многообразие, репер,

вершина параболоида, вектор, форма, система уравнений Пфаффа, индикатриса, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, конгруэнция, деривационные формулы, асимптотические линии.

Отнесем комплекс Π_3 эллиптических параболоидов к реперу $R = \{A, \bar{e}_i\}$, $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$, который геометрически характеризуется следующим образом: вершина репера совмещена с вершиной эллиптического параболоида, векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены и лежат в касательной плоскости эллиптического параболоида в его вершине, вектор $\bar{e}_3$ направлен по главному диаметру образующего элемента так, чтобы концы P_1 и P_2 соответственно векторов $\bar{e}_1 + \bar{e}_3$ и $\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ лежали на параболоиде q.

Уравнение эллиптического параболоида q в репере R согласно [1] принимает вид:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 - X^3 = 0. \qquad (1)$$

Принимая формы $\theta^1 = \omega^1$, $\theta^2 = \omega^2$, $\theta^3 = \omega_3^1$ за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса Π_3 в виде:

$$\begin{gathered} \omega_i^i = A_{ik}^i \theta^k,\ \omega_3^2 = A_{3k}^2 \theta^k,\ \omega_1^2 + \omega_2^1 = B_{1k}^2 \theta^k,\ \omega_1^3 = \alpha\theta^1 + \beta\theta^2, \\ \omega_2^3 = \beta\theta^1 + \gamma\theta^2,\ \omega^3 = 0\ (\text{по } i \text{ не суммировать!}). \end{gathered} \qquad (2)$$

Комплексы Π_3 существуют с произволом четырех функций трех аргументов [2].

Определение 1. *Комплекс* Π_3 *эллиптических параболоидов, в котором индикатрисы векторов* $\bar{e}_i$ *описывают линии с касательными, параллельными вектору* $\bar{e}_1$, *а точка* P_1 *принадлежит характеристическому многообразию [3], назовем комплексом* $\hat{\Pi}_3$.

Согласно определению 1, система уравнений Пфаффа комплекса $\hat{\Pi}_3$ примет вид:

$$\omega_1^1 = -\theta^1 - \theta^3,\ \omega_2^1 = \lambda\theta^2,$$
$$\omega_3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0. \qquad (3)$$

Комплексы $\hat{\Pi}_3$ существуют с произволом одной функции одного аргумента [2].

Теорема 1. *Характеристическое многообразие [3] эллиптического параболоида, ассоциированного с комплексом* $\hat{\Pi}_3$, *состоит из трех объектов: координатной прямой* $(A, \bar{e}_3)$, *точки* P_1 *и вершины эллиптического параболоида при* $\lambda \neq -1$, *а при* $\lambda = -1$ *в характеристическое многообразие добавляется еще один объект: координатная прямая* $(A, \bar{e}_2)$.

Доказательство. Характеристическое многообразие эллиптического параболоида q, являющегося образующим элементом комплекса $\hat{\Pi}_3$, задается следующей системой уравнений:

$$-(X^1)^2 + X^1 = 0,\ \lambda X^1 X^2 + X^2 = 0,\ -(X^1)^2 + X^1 X^3 = 0, \qquad (4)$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Фокальное многообразие [3] эллиптического параболоида q, ассоциированного с комплексом* $\hat{\Pi}_3$, *состоит из двух объектов: точки* P_1 *и вершины эллиптического параболоида q*.

Доказательство теоремы следует из того, что фокальное многообразие эллиптического параболоида, описывающего комплекс $\hat{\Pi}_3$, задается системой уравнений, состоящей из уравнения (1) и системы уравнений (4).

Теорема 3. *Комплекс* $\hat{\Pi}_3$ *обладает следующими геометрическими свойствами:*

1) *концы* A_1 *и* A_2 *координатных векторов* $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_2$, *каждая текущая точка координатной оси* $(A, \bar{e}_2)$ *описывают конгруэнции (двухпараметрические семейства) в координатной плоскости* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$;

2) *каждая текущая точка координатной прямой* $(A, \bar{e}_1)$ *и конец* A_3 *координатного вектора* $\bar{e}_3$ *описывают комплексы в*

координатной плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ *и в параллельной ей плоскости соответственно;*

3) *координатная плоскость* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ *неподвижна.*

Доказательство. Обозначим текущие точки координатных прямых $(A, \bar{e}_1)$ и $(A, \bar{e}_2)$, координатной плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ соответственно через $M_i(x^i)$. Из системы (3) и деривационных формул репера R следует, что

$$\begin{aligned}
&dA_1 = -\theta^3\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2,\\
&dA_2 = (\theta^1 + \lambda\theta^2)\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2,\\
&dA_3 = (\theta^1 + \theta^3)\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2,\\
&dM_1 = (dx^1 + \theta^1 - x^1\theta^1 - x^1\theta^3)\bar{e}_1 + \theta^2\bar{e}_2,\\
&dM_2 = (\theta^1 + \lambda x^2\theta^2)\bar{e}_1 + (dx^2 + \theta^2)\bar{e}_2,\\
&dM_3 = (dx^1 + \theta^1 - x^1\theta^1 - x^1\theta^3 + \lambda x^2\theta^2)\bar{e}_1 + (dx^2 + \theta^2)\bar{e}_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Продифференцировав равенства (5) и пытаясь найти асимптотические линии соответствующих поверхностей, убеждаемся в справедливости теоремы.

Список литературы

1. *Комиссарук А. М.* Аффинная геометрия. Минск, 1977.

2. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

3. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 6. Калининград, 1974. С. 113—133.

N. Vinogradova, M. Kretov

COMPLEXES OF ELLIPTIC PARABOLOIDS

In three-dimensional affine space complexes (three-parametrical families) of elliptic paraboloids are considered. It is shown that such complexes exist. Geometrical properties of researched varieties are found.